Dessine moi un domaine abstrait fini

une recette à base de Camlp4 et de solveurs SMT

Pierre Roux **Pierre-Loïc Garoche**

17 janvier 2011

Introduction

Avertissement

Hormis pour l'enseignement de l'interprétation abstraite,
ce que nous présentons aujourd'hui n'a guère d'applications.

Introduction

Avertissement

Hormis pour l'enseignement de l'interprétation abstraite,
ce que nous présentons aujourd'hui n'a guère d'applications.

- La sémantique des programmes est généralement non calculable
- On veut donc en **calculer** une **surapproximation**
- La théorie de l'interprétation abstraite fournit un cadre pour effectuer de tels calculs

Introduction

Avertissement

Hormis pour l'enseignement de l'interprétation abstraite,
ce que nous présentons aujourd'hui n'a guère d'applications.

- La sémantique des programmes est généralement non calculable
- On veut donc en **calculer** une **surapproximation**
- La théorie de l'interprétation abstraite fournit un cadre pour effectuer de tels calculs
- On cherche à générer une partie de tels analyseurs :
  - déscription de la surapproximation (structure de treillis)
  - sémantique d'opérateurs de base ($+$, $-$, $*$)

Treillis

Définition

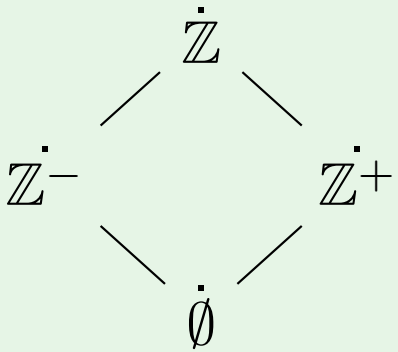
Treillis complet : ensemble A muni de :

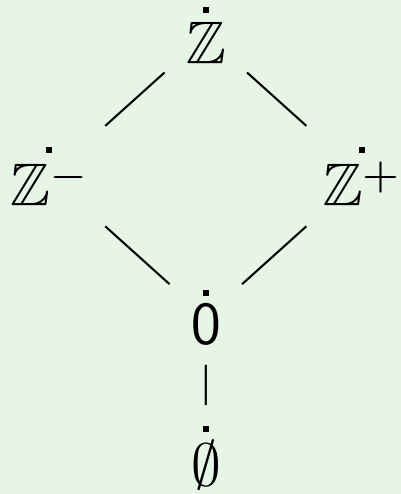
- ordre partiel $\sqsubseteq$
- borne supérieure $\bigsqcup$: pour toute partie S de A,

$$\forall x \in S, x \sqsubseteq \bigsqcup S \qquad \text{(majorant)}$$
$$\forall y \in A, (\forall x \in S, x \sqsubseteq y) \Rightarrow \bigsqcup S \sqsubseteq y \qquad \text{(le plus petit)}$$

Exemple

Deux treillis complet





Borne inférieure et infimums

Propriété

Tout treillis complet A possède :

- borne inférieure $\bigsqcap : S \mapsto \bigsqcup \{y \mid \forall x \in S, y \sqsubseteq x\}$
- plus petit élément : $\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap A$
- plus grand élément : $\top = \bigsqcup A = \bigsqcap \emptyset$

Borne inférieure et infimums

Propriété

Tout treillis complet A possède :

- borne inférieure $\bigsqcap : S \mapsto \bigsqcup \{y \mid \forall x \in S, y \sqsubseteq x\}$
- plus petit élément : $\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap A$
- plus grand élément : $\top = \bigsqcup A = \bigsqcap \emptyset$

Exemple : parties d'un ensemble

Pour tout ensemble (ex. $\mathbb{Z}$), l'**ensemble de ses parties** ($\mathcal{P}(\mathbb{Z})$) muni de l'**ordre inclusion** $\sqsubseteq = \subseteq$ et de la **borne supérieure union** $\sqcup = \cup$ est un treillis complet et :

- $\sqcap = \cap$
- $\bot = \emptyset$
- $\top = \mathbb{Z}$

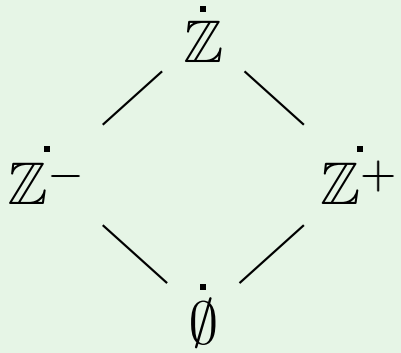
Fonction de concrétisation

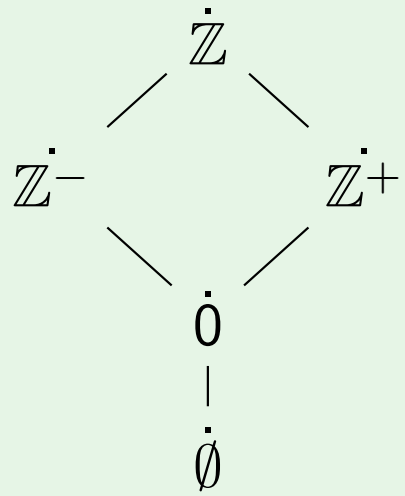
Définitions

- **concret** : treillis complet $(S, \sqsubseteq, \sqcup)$
  (ex. $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq, \cup)$ pour une variable entière)
- **abstrait** : treillis complet $(S^\sharp, \sqsubseteq^\sharp, \sqcup^\sharp)$
- **fonction de concrétisation** : $\gamma : S^\sharp \to S$
  ($s^\sharp \in S^\sharp$ est une sur-approximation de $s \in S$ si $s \sqsubseteq \gamma(s^\sharp)$)

Exemple

$$\gamma(\dot{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$$
$$\gamma(\dot{\mathbb{Z}}^-) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 0\}$$
$$\gamma(\dot{\mathbb{Z}}^+) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 0\}$$
$$\gamma(\dot{0}) = \{0\}$$
$$\gamma(\dot{\emptyset}) = \emptyset$$





Opérateurs abstraits

Définition

Pour une opération f du programme concret
(ex. l'addition $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$),
$f^\sharp$ est une **abstraction correcte** de f si :

$$\forall x_1^\sharp, \ldots, x_n^\sharp \in S^\sharp, f\left(\gamma(x_1^\sharp), \ldots, \gamma(x_n^\sharp)\right) \sqsubseteq \gamma\left(f^\sharp\left(x_1^\sharp, \ldots, x_n^\sharp\right)\right)$$

Opérateurs abstraits

Définition

Pour une opération f du programme concret
(ex. l'addition $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$),
$f^\sharp$ est une **abstraction correcte** de f si :

$$\forall x_1^\sharp, \ldots, x_n^\sharp \in S^\sharp, f\left(\gamma(x_1^\sharp), \ldots, \gamma(x_n^\sharp)\right) \sqsubseteq \gamma\left(f^\sharp\left(x_1^\sharp, \ldots, x_n^\sharp\right)\right)$$

Exemples

- $\dot{0} +^\sharp \dot{0} = \dot{0}$
- $\dot{\mathbb{Z}}^+ +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^+ = \dot{\mathbb{Z}}^+$
- $\dot{\mathbb{Z}}^+ +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^- = \dot{\mathbb{Z}}$
- $\ldots$

Opérateurs abstraits

Définition

Pour une opération f du programme concret
(ex. l'addition $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$),
$f^\sharp$ est une **abstraction correcte** de f si :

$$\forall x_1^\sharp, \ldots, x_n^\sharp \in S^\sharp, f\left(\gamma(x_1^\sharp), \ldots, \gamma(x_n^\sharp)\right) \sqsubseteq \gamma\left(f^\sharp\left(x_1^\sharp, \ldots, x_n^\sharp\right)\right)$$

Exemples

- $\dot{0} +^\sharp \dot{0} = \dot{0}$
- $\dot{\mathbb{Z}}^+ +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^+ = \dot{\mathbb{Z}}^+$
- $\dot{\mathbb{Z}}^+ +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^- = \dot{\mathbb{Z}}$
- $\ldots$

$+^\sharp : . \mapsto \dot{\mathbb{Z}}$
est toujours correct

Meilleure abstraction

- On suppose γ monotone (si $s^\sharp \sqsubseteq^\sharp s'^\sharp$ alors $\gamma(s^\sharp) \sqsubseteq \gamma(s'^\sharp)$)
- l'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ signifie donc « est plus précis que »

Meilleure abstraction

- On suppose γ monotone (si $s^\sharp \sqsubseteq^\sharp s'^\sharp$ alors $\gamma(s^\sharp) \sqsubseteq \gamma(s'^\sharp)$)
- l'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ signifie donc « est plus précis que »

Définition

$s^\sharp \in S^\sharp$ est la **meilleure abstraction** de $s \in S$ s'il est plus petit que toutes les autres sur-approximations de s.

Meilleure abstraction

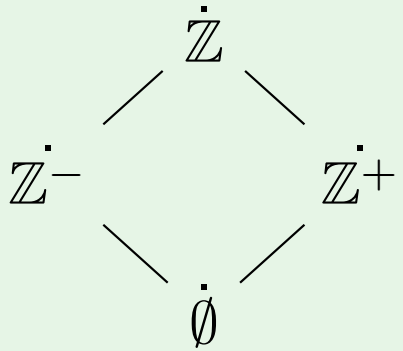
- On suppose γ monotone (si $s^\sharp \sqsubseteq^\sharp s'^\sharp$ alors $\gamma(s^\sharp) \sqsubseteq \gamma(s'^\sharp)$)
- l'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ signifie donc « est plus précis que »

Définition

$s^\sharp \in S^\sharp$ est la **meilleure abstraction** de $s \in S$ s'il est plus petit que toutes les autres sur-approximations de s.

Existence

On n'a pas toujours existence : $\dot{\mathbb{Z}}^-$ et $\dot{\mathbb{Z}}^+$ sont des sur-approximations de 0 incomparables



Correspondance de Galois

Définition

Soit $(S, \sqsubseteq, \cup)$ et $(S^\sharp, \sqsubseteq^\sharp, \cup^\sharp)$ deux treillis complet.
Deux fonctions $\alpha : S \to S^\sharp$ et $\gamma : S^\sharp \to S$ forment une **correspondance de Galois** si :

$$\forall s \in S, \forall s^\sharp \in S^\sharp, \alpha(s) \sqsubseteq^\sharp s^\sharp \Leftrightarrow s \sqsubseteq \gamma(s^\sharp)$$

Correspondance de Galois

Définition

Soit $(S, \sqsubseteq, \cup)$ et $(S^\sharp, \sqsubseteq^\sharp, \cup^\sharp)$ deux treillis complet.
Deux fonctions $\alpha : S \to S^\sharp$ et $\gamma : S^\sharp \to S$ forment une **correspondance de Galois** si :

$$\forall s \in S, \forall s^\sharp \in S^\sharp, \alpha(s) \sqsubseteq^\sharp s^\sharp \Leftrightarrow s \sqsubseteq \gamma(s^\sharp)$$

Théorème

L'existence d'une meilleure abstraction pour tout élément de S équivaut à l'existence d'une fonction α formant une correspondance de Galois avec γ.

La meilleure abstraction d'une opération f dans S est alors :

$$f^\sharp = \alpha \circ f \circ \gamma$$

Signature du module OCaml

```
module type Lattice = sig
  type t
  val eq : t -> t -> bool  (* égalité *)
  val order : t -> t -> bool  (* ⊑♯ *)
  val join : t -> t -> t  (* x♯, y♯ ↦ ⨆{ x♯, y♯ } *)
  val meet : t -> t -> t  (* x♯, y♯ ↦ ⨅{ x♯, y♯ } *)
  val top : t  (* ⊤ *)
  val bottom : t  (* ⊥ *)
  val to_string : t -> string  (* fonction d'affichage *)
end
```

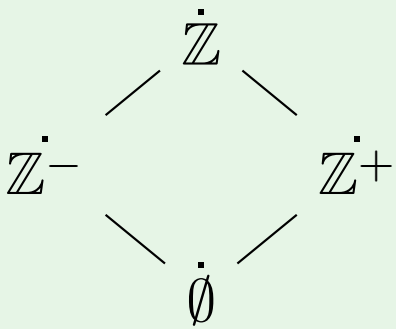
Diagramme de Hasse

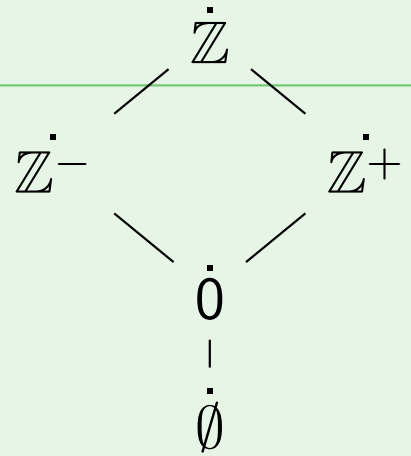
Définition

Diagramme de Hasse : représentation graphique d'un ordre partiel $\sqsubseteq$ sur un ensemble fini S

- les éléments de S sont représentés par des points
- si $x \in S$ est inférieur à $y \in S$ ($x \sqsubseteq y$) alors on dessine le point x plus bas que y
- on trace un trait entre x et y si et seulement si x est directement inférieur à y ($x \sqsubseteq y$ et si $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$ alors $z = x$ ou $z = y$)

Exemple





Dessine moi un domaine abstrait

ASCII art

```
<:finite_lattice<
     STop
    /    \
SLe0      SGe0
    \    /
     SZero
       |
       |
     SBot
>>
```

$\longrightarrow$

SBot, SZero
| SZero, SLe0
| SZero, SGe0
| SLe0, STop
| SGe0, STop

- Camlp4 nous donne la chaîne entre `<:finite_lattice<` et `>>`
- on lit le diagramme de Hasse ligne par ligne
- on génère le motif de filtrage de droite
- Camlp4 fait le remplacement dans le code source

Génération du treillis

- on génère l'ordre par cloture reflexive transitive du résultat précédent
- borne supérieure (resp. inférieure) : pour chaque paire :
  - on calcule l'ensemble des majorants (resp. minorant)
  - on prend son minimum (resp. maximum) s'il existe
  - sinon, on n'est pas en présence d'un treillis complet
- $\top$ (resp. $\bot$) : on prend le maximum (resp. minimum) de l'ensemble (s'il existe, sinon on n'est pas en présence d'un treillis complet)

Propriété

Dans le cas d'ensembles $S^\sharp$ finis, la donnée d'une borne supérieure ensembliste $\bigsqcup^\sharp : \mathcal{P}(S^\sharp) \to S^\sharp$ est équivalente à la donnée de $\bot$ et d'une borne supérieure binaire $\sqcup^\sharp : S^\sharp \times S^\sharp \to S^\sharp$.

Exemple de code généré

```
type sSign2_base_t = | S0 | STop | SLe0 | SGe0 | SBot
module SSign2Lat : LatticeDef.Lattice with type t = sSign2_base_t = struct
  type t = sSign2_base_t
  let eq = ( = )
  let order a b = match (a, b) with
    | (S0, S0) | (S0, SGe0) | (S0, SLe0) | (S0, STop) | (SBot, S0) |
        (SBot, SBot) | (SBot, SGe0) | (SBot, SLe0) | (SBot, STop) |
        (SGe0, SGe0) | (SGe0, STop) | (SLe0, SLe0) | (SLe0, STop) |
        (STop, STop) -> true
    | _ -> false
  let join a b = match (a, b) with
    | (SBot, SBot) -> SBot
    | (S0, SGe0) | (SGe0, S0) | (SGe0, SGe0) | (SGe0, SBot) | (SBot, SGe0)
        -> SGe0
    | (S0, SLe0) | (SLe0, S0) | (SLe0, SLe0) | (SLe0, SBot) | (SBot, SLe0)
        -> SLe0
    | (S0, STop) | (STop, S0) | (STop, STop) | (STop, SLe0) | (STop, SGe0)
        | (STop, SBot) | (SLe0, STop) | (SLe0, SGe0) | (SGe0, STop) |
        (SGe0, SLe0) | (SBot, STop) -> STop
    | (S0, S0) | (S0, SBot) | (SBot, S0) -> S0
  let meet a b = [...]
  let top = STop
  let bottom = SBot
end
```

Lecture de la fonction de concrétisation

Pour lire $\gamma : S^\sharp \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, on utilise la grammaire Camlp4 :

```
EXTEND Gram
GLOBAL : str_item ;
str_item :
  [ [ "abstract_domain" ; id = UIDENT ;
      "on" ; order = patt ;
      "with" ; concr = gamma -> generate _loc id order concr ] ] ;
gamma :
  [ [ "gamma" ; v = LIDENT ; "=" ; "function" ; OPT "|" ;
    b = gamma_body -> _loc, v, b ] ] ;
gamma_body :
  [ [ c = gamma_case ; "|" ; l = SELF -> c : :l
    | c = gamma_case -> [c] ] ] ;
gamma_case :
  [ [ c = UIDENT ; "->" ; s = STRING -> _loc, c, s ] ] ;
END
```

Pour chaque c de $S^\sharp$ la chaîne de caractères s donne $\mathtt{v} \in \gamma(\mathtt{c})$ comme une formule Smtlib.

Exemple

Spécification complète d'un domaine abstrait :

```
abstract_domain Sign on
<:finite_lattice<
     STop
    /    \
SLe0      SGe0
    \    /
     SZero
       |
       |
     SBot
>>
with gamma x = function
  | STop -> "true"
  | SLe0 -> "(<= x 0)"
  | SGe0 -> "(>= x 0)"
  | SZero -> "(= x 0)"
  | SBot -> "false"
```

Vérification de la fonction de concrétisation

γ doit vérifier les propriétés :

- monotonie : si $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$ alors $\gamma(x^\sharp) \sqsubseteq \gamma(y^\sharp)$
- $\gamma(\top) = \mathbb{Z}$ (il existe toujours une abstraction correcte)
- correction de la borne inférieure binaire : pour tout $x^\sharp$ et $y^\sharp$ de $S^\sharp$, $\gamma(x^\sharp) \sqcap \gamma(y^\sharp) \sqsubseteq \gamma\left(x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp\right)$

On teste cela avec un solveur SMT

Signature du module OCaml

```
module type IntAbsDom = sig
  include Lattice

  val add : t -> t -> t  (* addition en avant *)
  val sub : t -> t -> t  (* soustraction en avant *)
  val mul : t -> t -> t  (* multiplication en avant *)
  val add_bwd : t -> t -> t -> t * t  (* addition en arrière *)
  val sub_bwd : t -> t -> t -> t * t  (* soustraction en arrière *)
  val mul_bwd : t -> t -> t -> t * t  (* multiplication en arrière *)
end
```

Une opération arrière raffine deux opérandes $x^\sharp$ et $y^\sharp$ lorsque $z^\sharp$ sur-approxime le résultat (ex. `add_bwd` $\dot{\mathbb{Z}}^- \; \dot{\mathbb{Z}}^- \; \dot{0} = \dot{0}, \dot{0}$)

Sémantique avant

L'opérateur binaire $binop^\sharp$ est une abstraction correcte de $binop$ si :

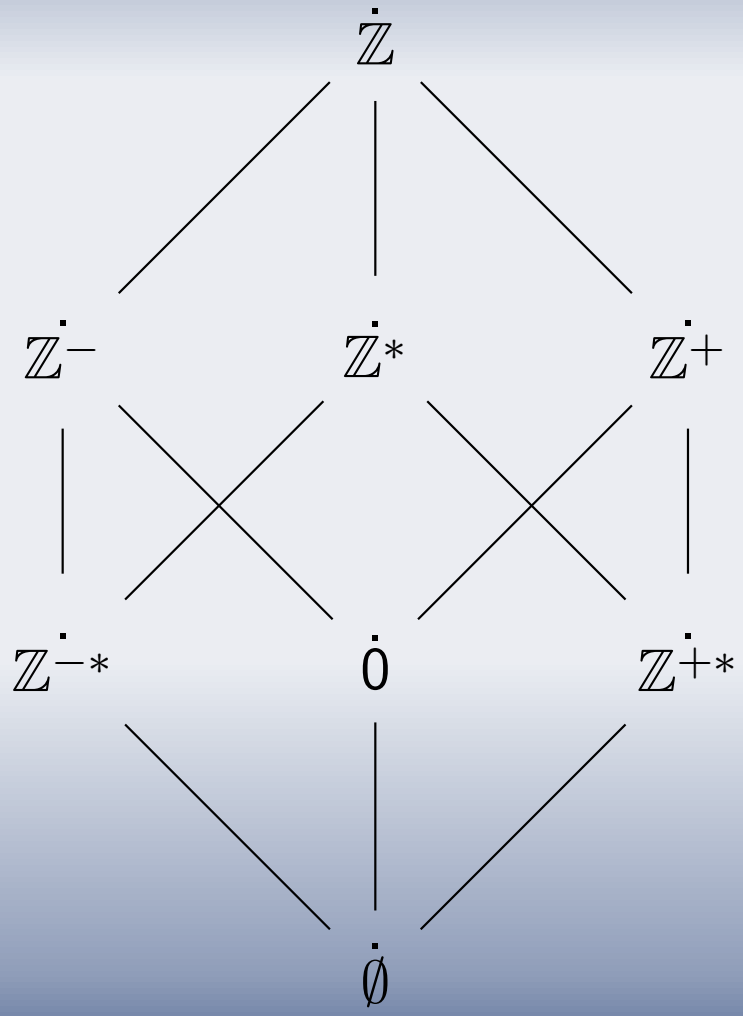
$$\forall x^\sharp, y^\sharp \in S^\sharp, \forall x, y, z \in S, x \in \gamma(x^\sharp) \wedge y \in \gamma(y^\sharp) \wedge z = x\ binop\ y \Rightarrow z \in \gamma\left(x^\sharp\ binop^\sharp\ y^\sharp\right)$$

D'où la méthode de calcul de $x^\sharp binop^\sharp y^\sharp$:

- pour tout $z^\sharp$, vérifier la formule précédente avec un solveur SMT ;
- choisir le plus petit des $z^\sharp$ ayant passé le test précédent.

Sémantique avant, exemple

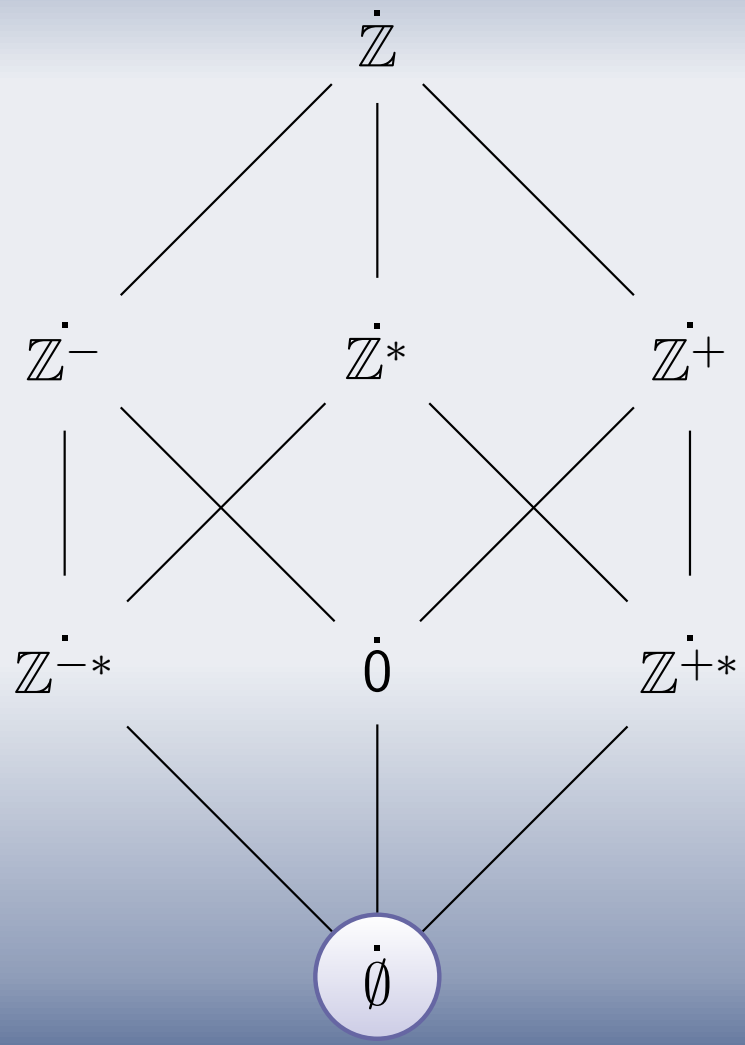
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

$\dot{\mathbb{Z}}^{\dot{+}*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{\dot{+}}$:

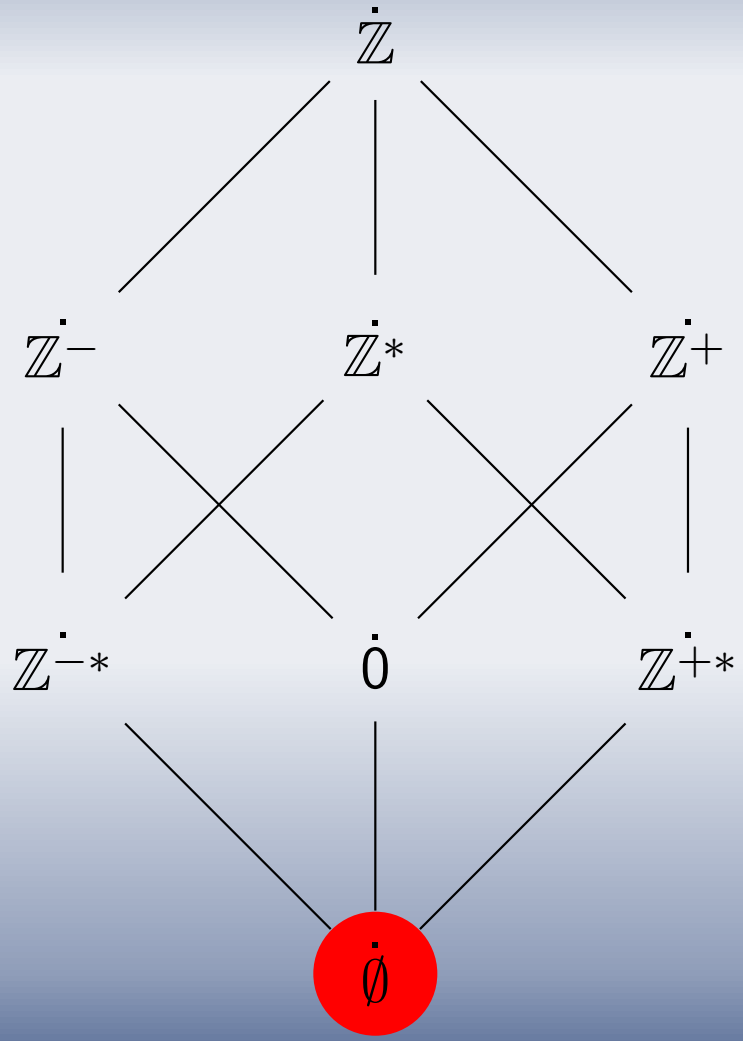
$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y \in \emptyset$



Dessine moi un domaine abstrait

Sémantique avant, exemple

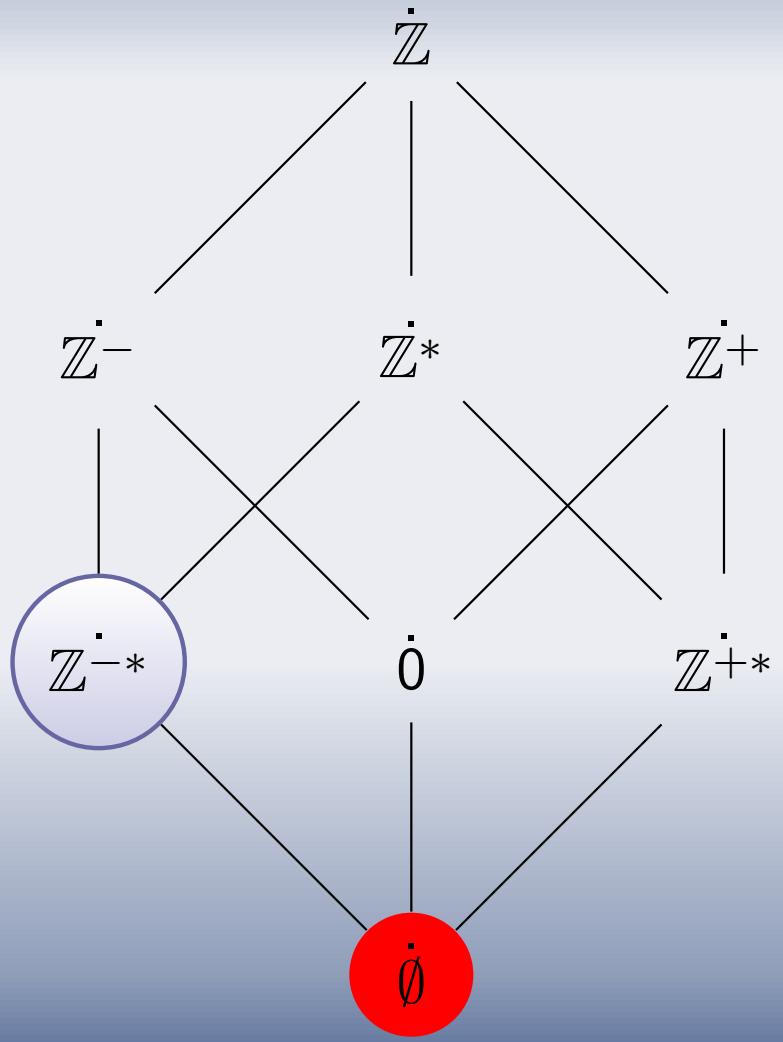
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

$\dot{\mathbb{Z}}^{\dot{+}*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{\dot{+}}$:

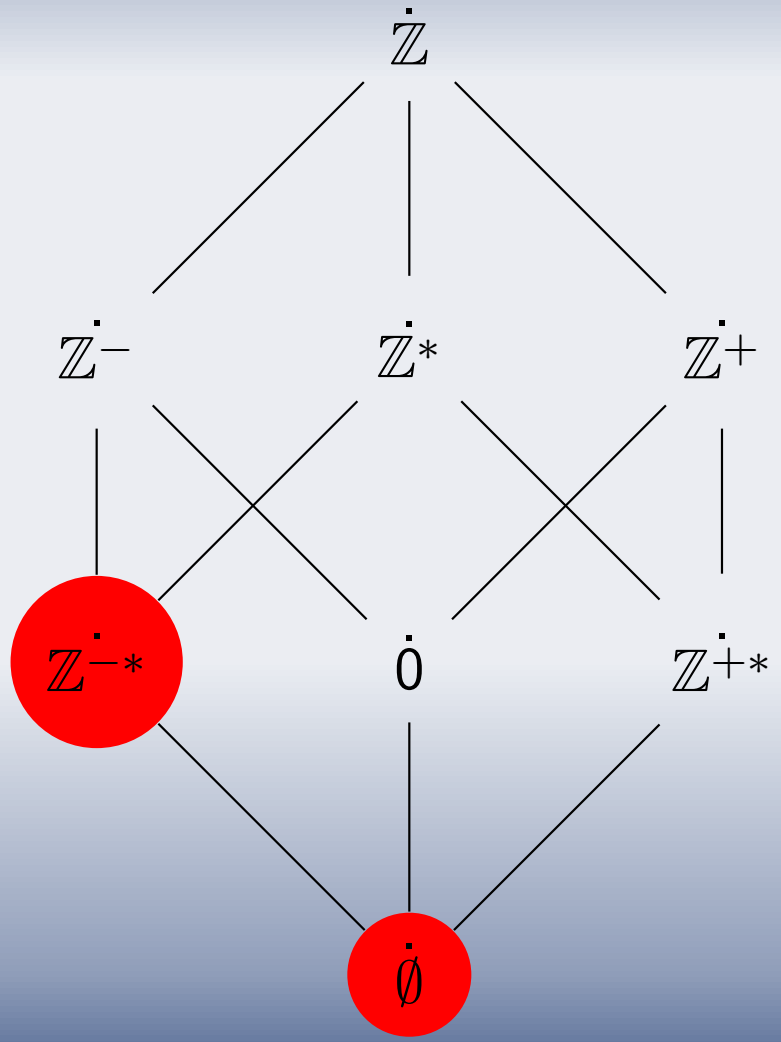
$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y < 0$



Dessine moi un domaine abstrait

Sémantique avant, exemple

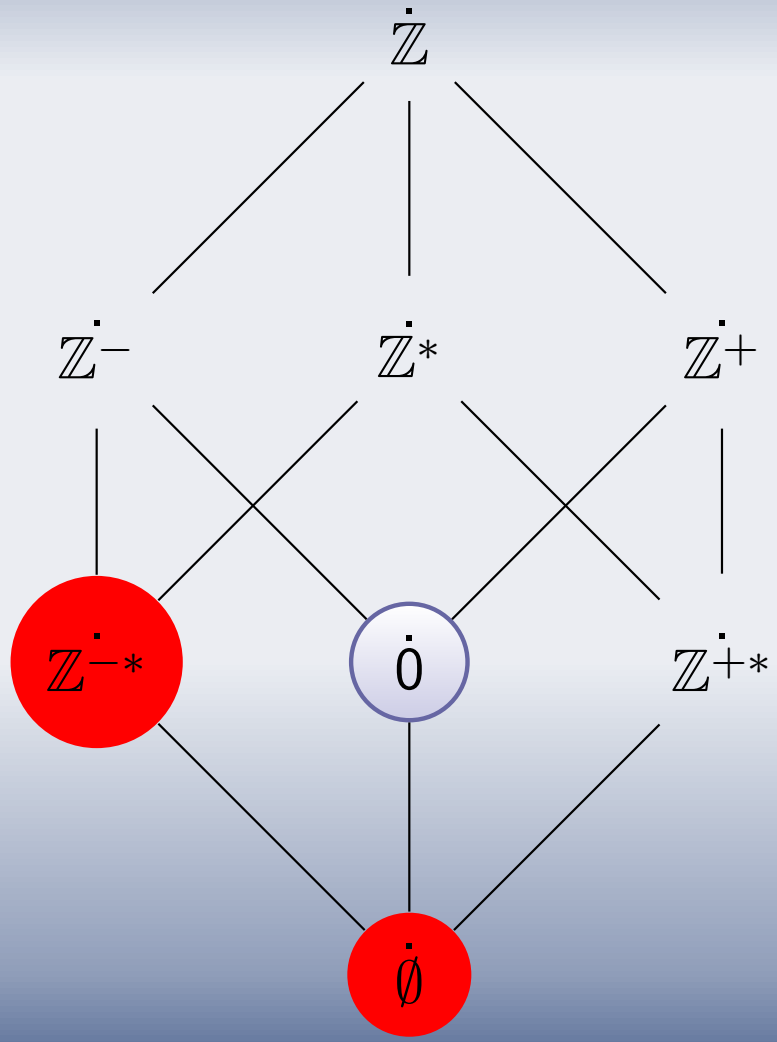
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

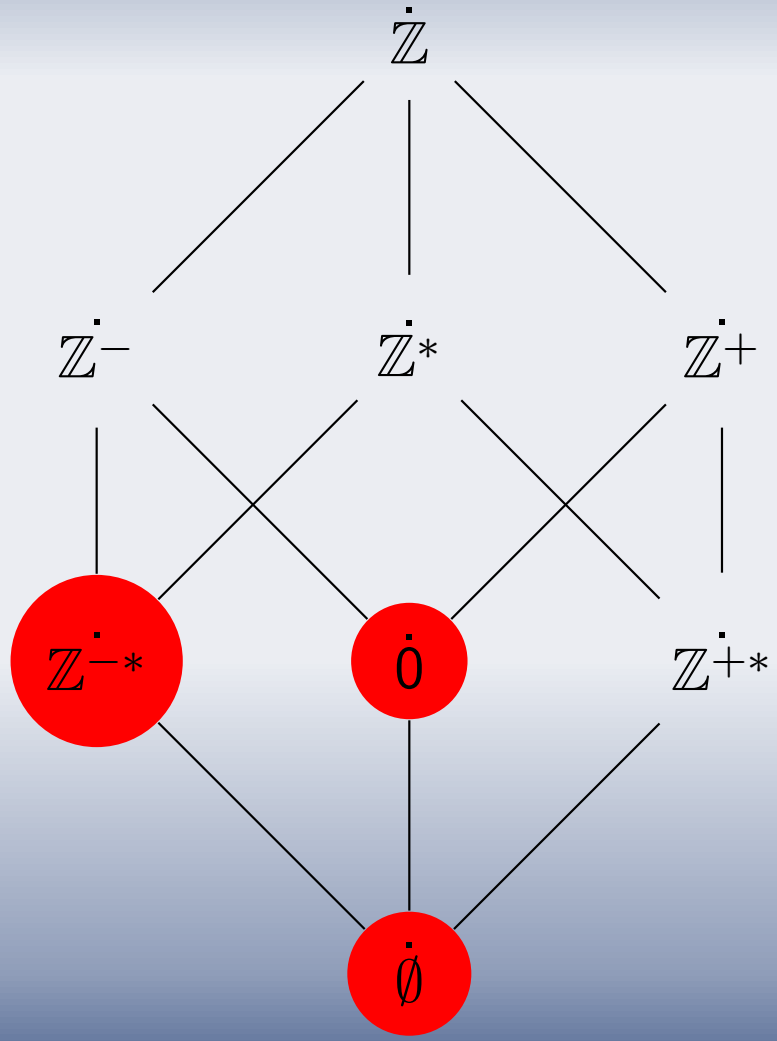
$\dot{\mathbb{Z}}^{\dot{+}*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{\dot{+}}$:

$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y = 0$



Sémantique avant, exemple

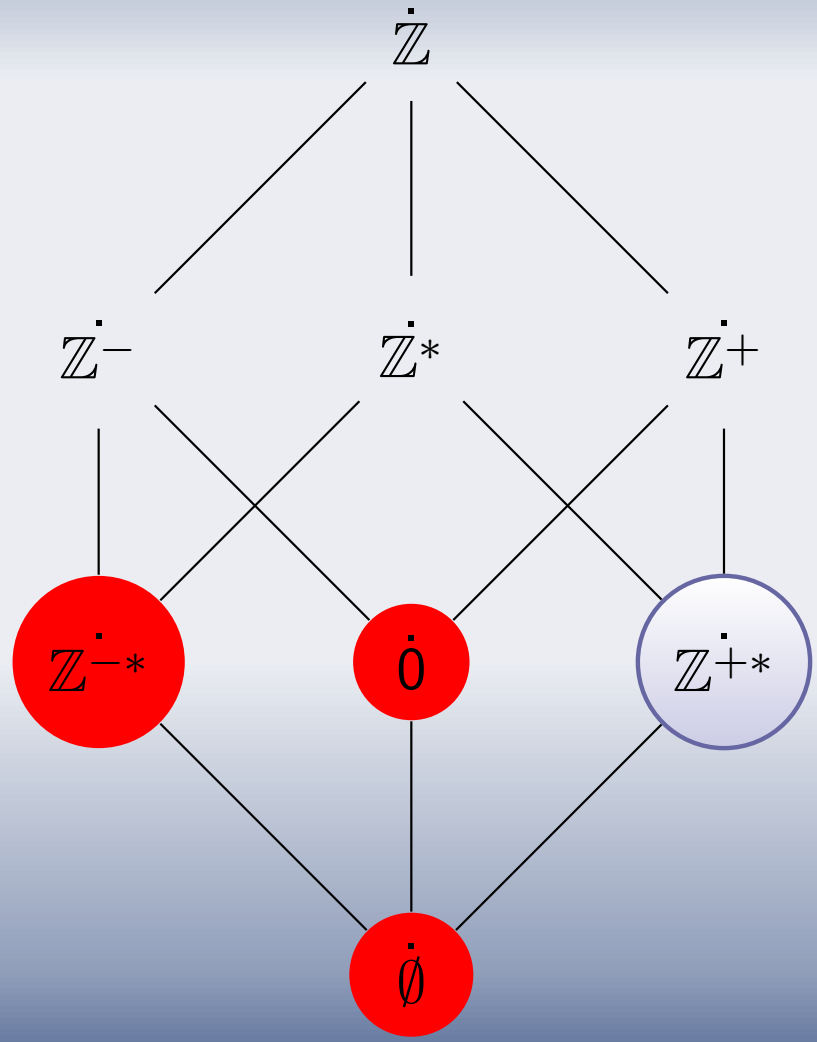
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+}$:

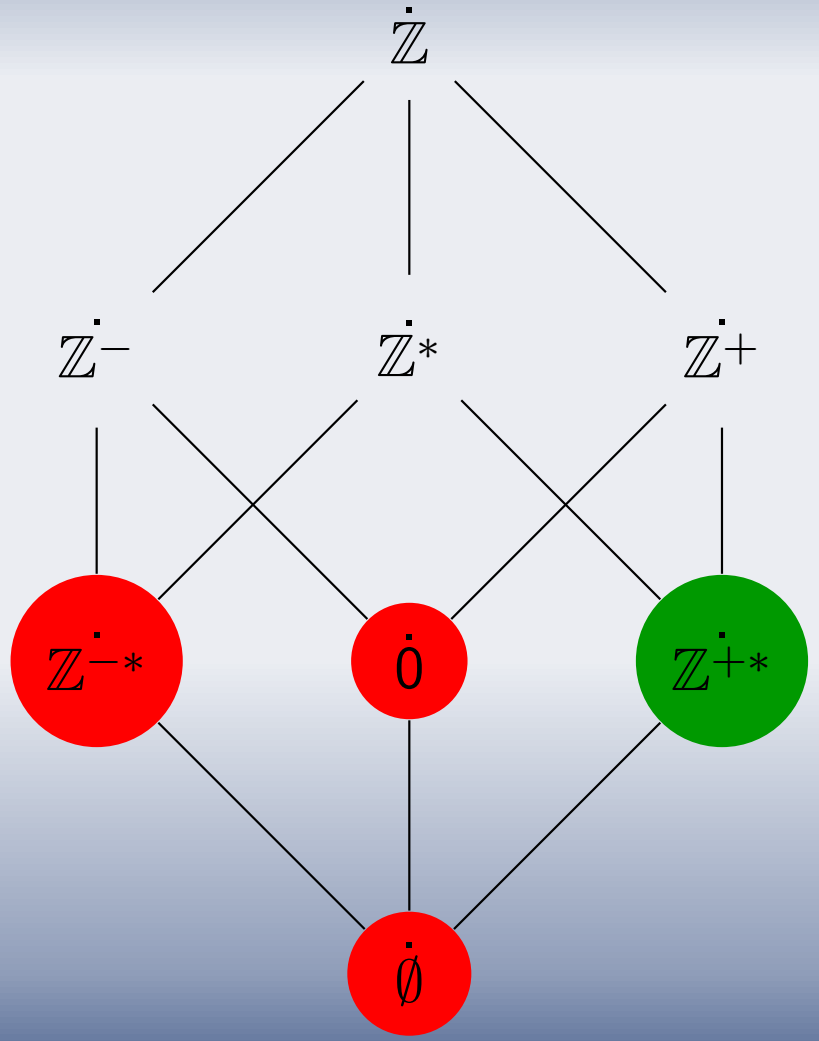
$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y > 0$



Dessine moi un domaine abstrait

Sémantique avant, exemple

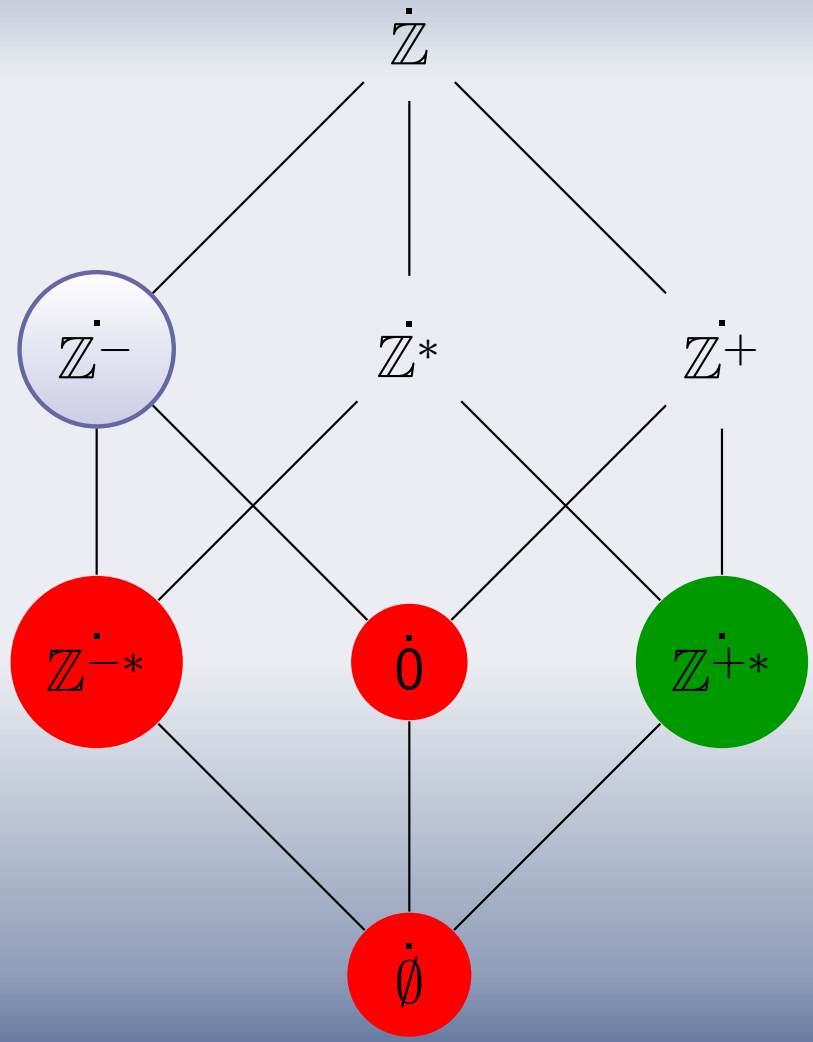
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$

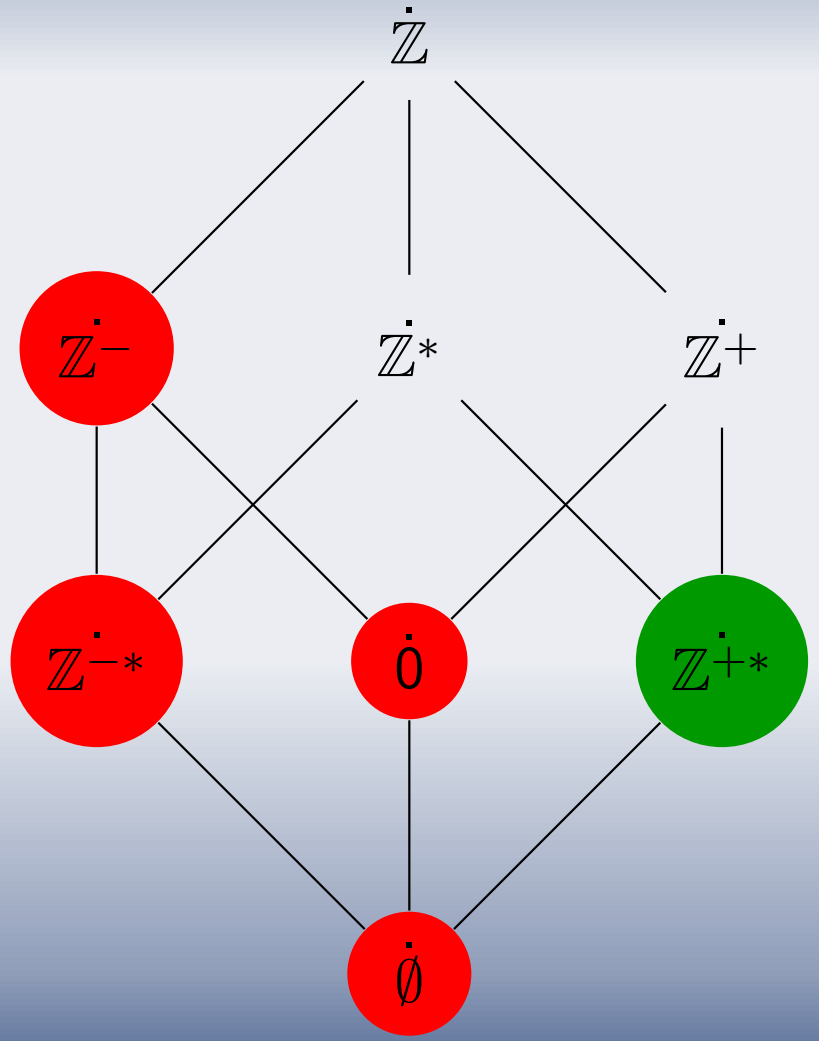
$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y \leqslant 0$



Dessine moi un domaine abstrait

Sémantique avant, exemple

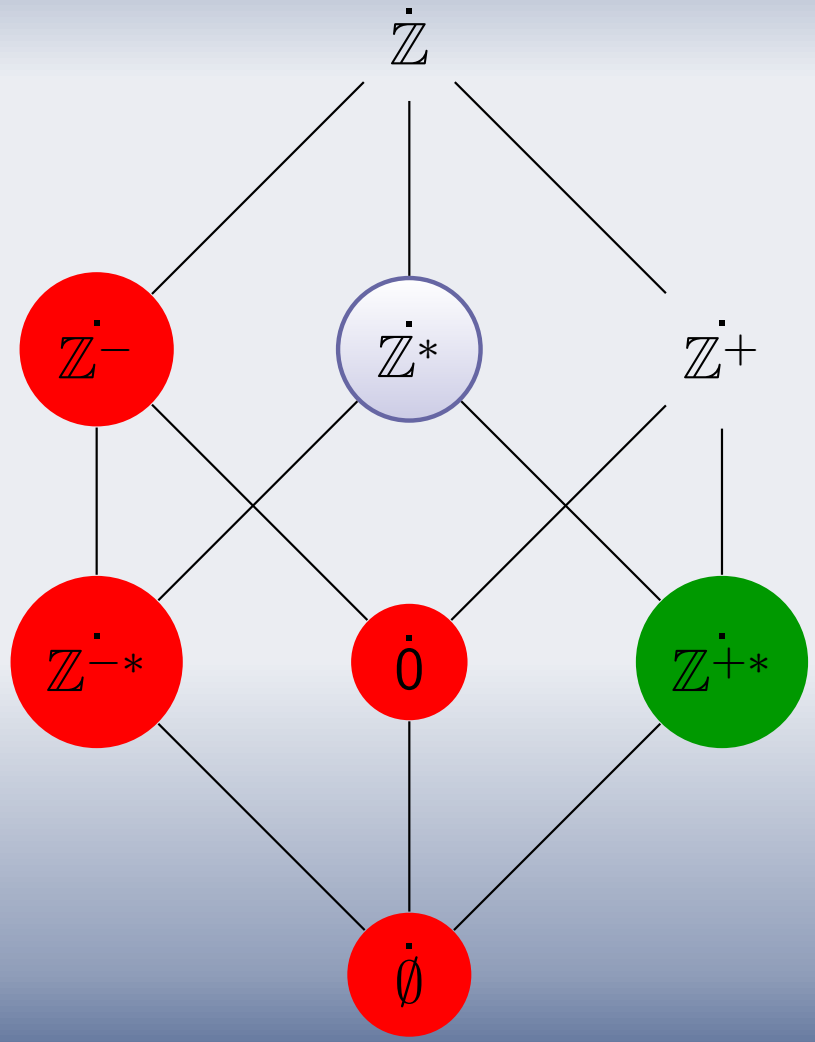
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

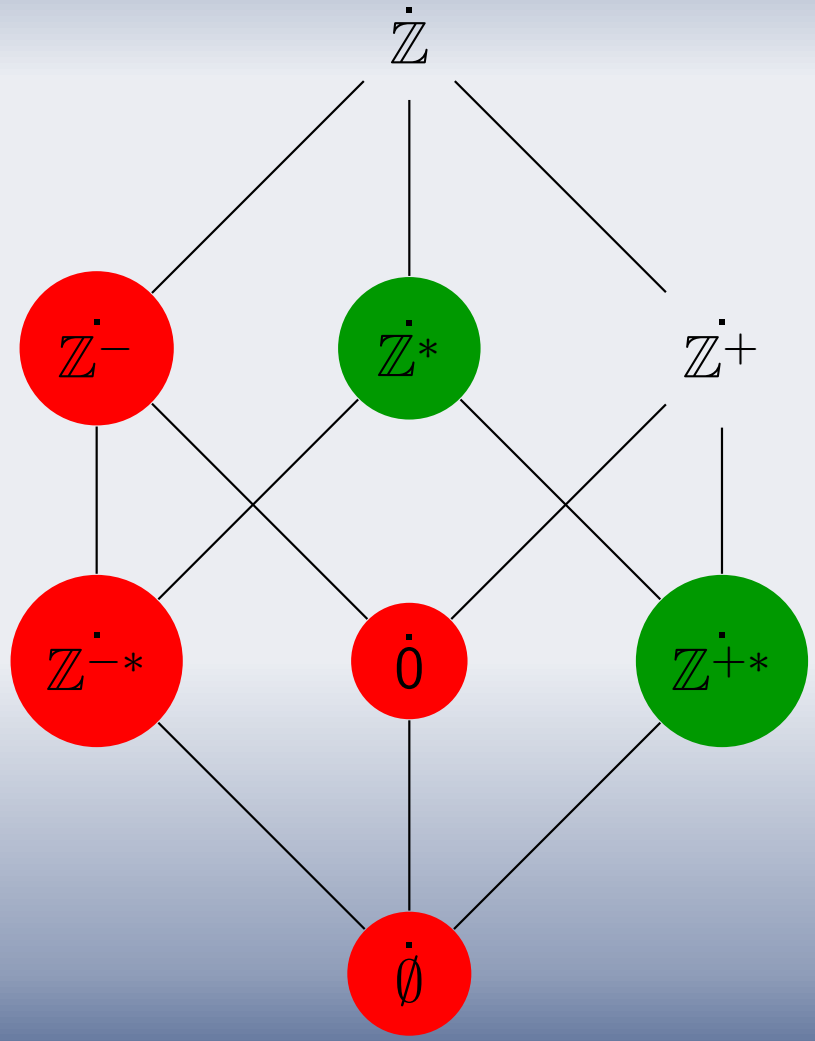
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+}$:

$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y \neq 0$



Sémantique avant, exemple

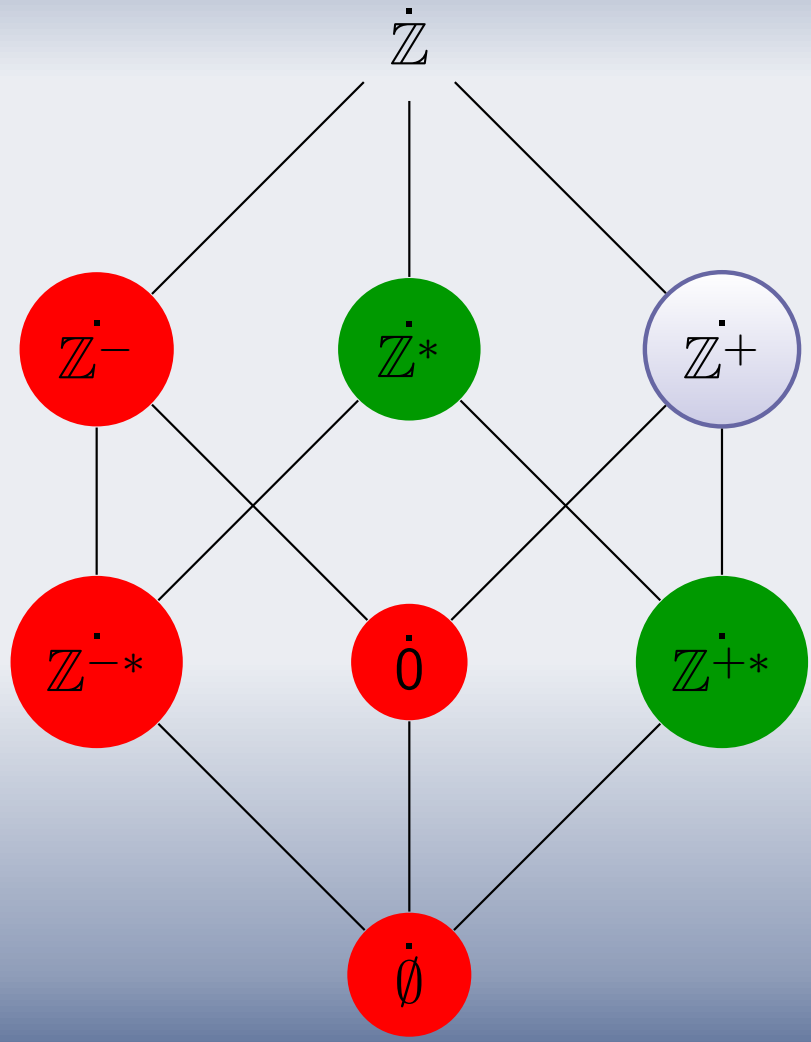
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

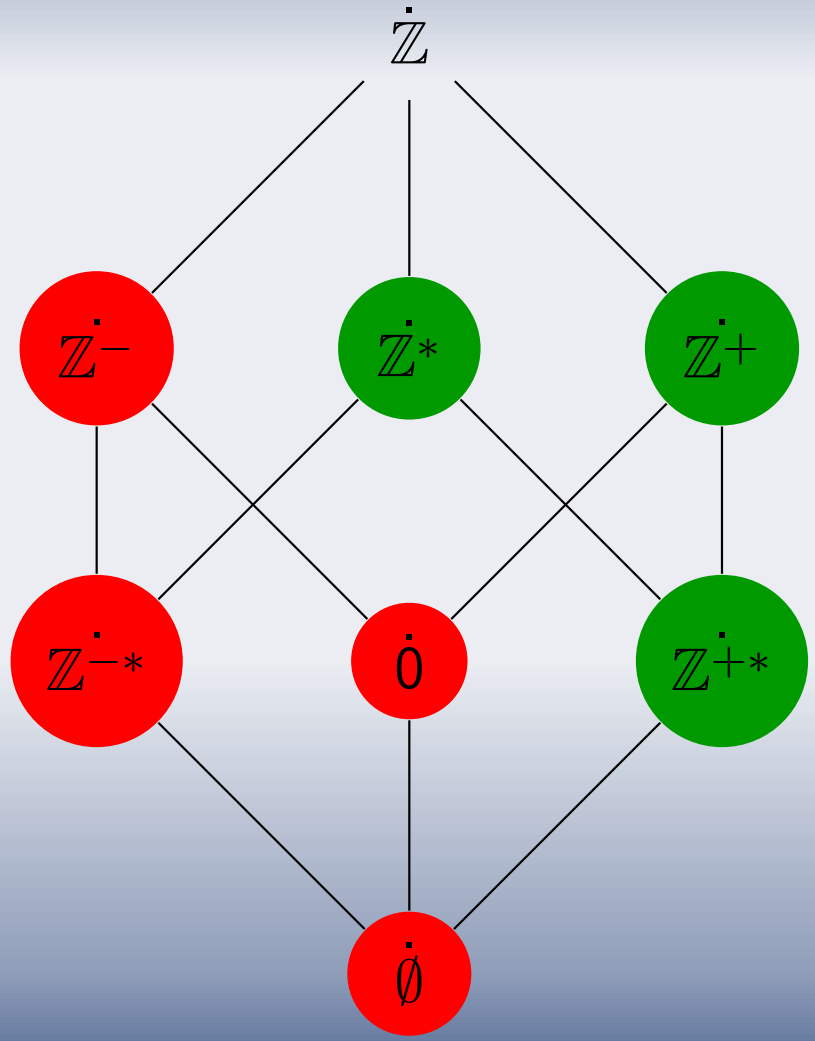
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+}$:

$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y \geqslant 0$



Sémantique avant, exemple

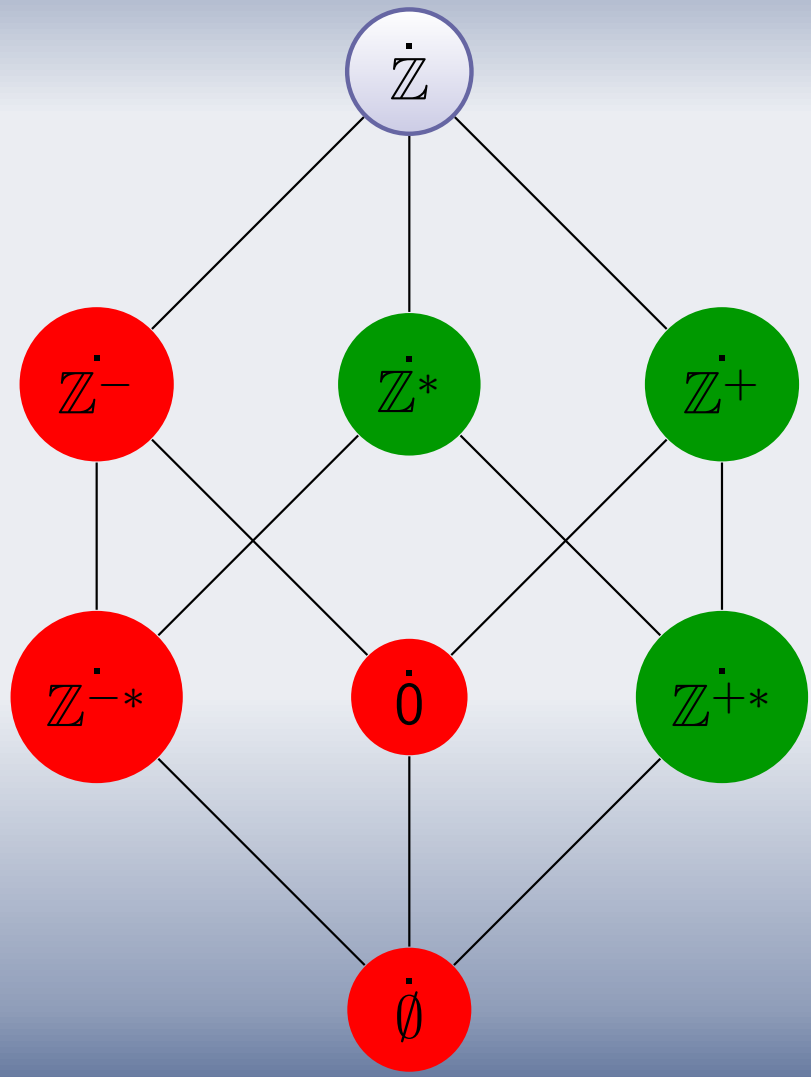
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

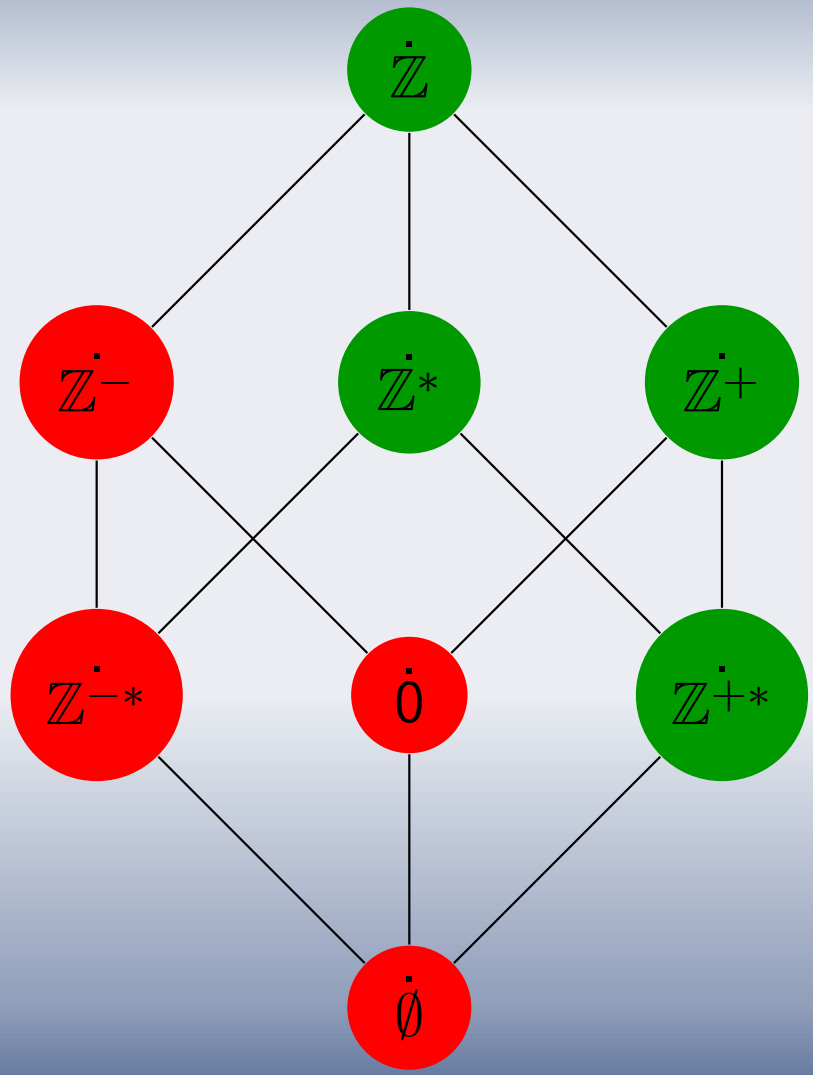
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+}$:

$\forall x, y.\ x > 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z}$



Sémantique avant, exemple

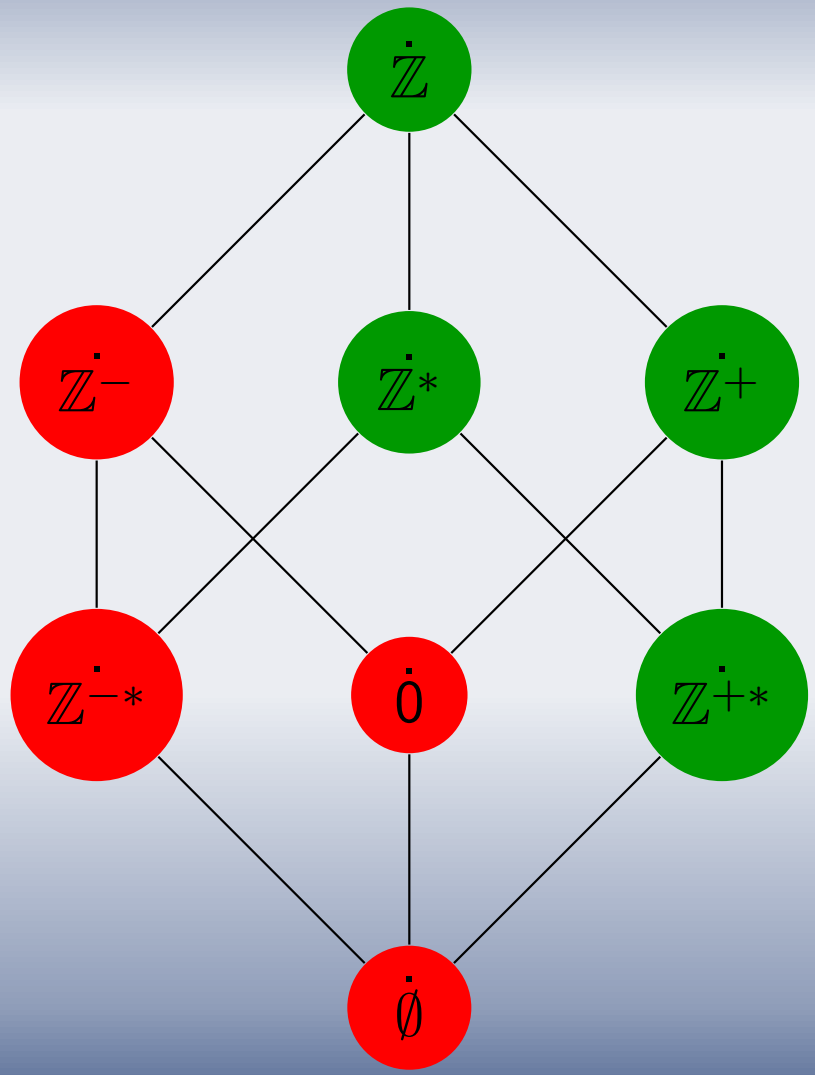
$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$



Sémantique avant, exemple

$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} :$

$\dot{\mathbb{Z}}^{+*} +^\sharp \dot{\mathbb{Z}}^{+} = \dot{\mathbb{Z}}^{+*}$



Sémantique arrière

Formule différente mais méthode similaire :

$$\forall x^\sharp, y^\sharp, z^\sharp, x'^\sharp, y'^\sharp \in S^\sharp, \forall x, y, z \in S, x \in \gamma(x^\sharp) \wedge y \in \gamma(y^\sharp) \wedge \\ z = x \ binop \ y \wedge z \in \gamma(z^\sharp) \wedge \\ (x'^\sharp, y'^\sharp) = binop^\sharp{\downarrow}(x^\sharp, y^\sharp, z^\sharp) \Rightarrow \\ x \in \gamma(x'^\sharp) \wedge y \in \gamma(y'^\sharp)$$

On remarque qu'on peut calculer $x'^\sharp$ et $y'^\sharp$ séparément.

Optimisations

Pour limiter le nombre d'appels aux solveurs,
on peut exploiter les propriétés suivantes :

- monotonie de $binop^\sharp$;
- lorsque un $z^\sharp$ est une abstraction correcte,
  la meilleure abstraction est un élément plus petit ;
- lorsque un $z^\sharp$ n'est pas une abstraction correcte,
  les éléments plus petit ne le sont pas non plus.

Sur quelques exemples classiques

Domaine	taille de $S^\sharp$	sans optimisation (temps total)	avec optimisations (temps total)
bot_top	2	49 (1 s)	40 (1 s)
eq_zero	4	628 (6 s)	339 (4 s)
signs	4	628 (7 s)	300 (3 s)
signs_with_zero	5	1540 (17 s)	594 (7 s)
extended_signs	8	7500 (83 s)	2429 (33 s)
parity	4	617 (8 s)	325 (4 s)
mod3	5	1294 (147 s)	600 (117 s)

Nombre d'appels aux solveurs SMT et temps d'exécution (sur un Core 2 @ 1.20 GHz)

Quelques remarques

- + code compact (un millier de lignes de Caml)
- + on obtient la meilleure abstraction sur l'essentiel des exemples
- - on est limité à des domaines finis (sans grand usage pratique)...
- - ...de petite taille
  (complexité en $\Omega(n^3)$ pour un treillis de n éléments)
- - difficile de prouver certaines propriétés de congruence
  ou faisant intervenir la multiplication avec les solveurs utilisés

Questions

?